

Ruang Barisan Orlicz Selisih Dengan Fungsional Aditif Dan Kontinunya

Sadjidon

Jurusan Matematika

Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya

Abstrak

Pada paper ini dibahas tipe lain ruang barisan Orlicz selisih, $\ell_\varphi(\Delta)$, yang didefinisikan sebagai: $\ell_\varphi(\Delta) := \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\varphi\}$ dengan $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k-1})$. Selanjutnya, ruang yang dilengkapi dengan norma $\|x\| = |x_1| + \|\Delta x\|_{\ell_\varphi}$ merupakan ruang bernorma- F yang lengkap dan juga mempunyai sifat AK . Berdasarkan pengertian fungsional aditif dan kontinu pada ruang barisan Orlicz, ℓ_φ , dibahas fungsional aditif dan kontinu pada ruang barisan Orlicz selisih.

Kata kunci: Ruang bernorma- F yang lengkap, Sifat AK , Ruang barisan Orlicz selisih, Fungsional aditif dan kontinu

1. Pendahuluan.

Representasi fungsional aditif orthogonal pada beberapa ruang barisan telah banyak dibicarakan antara lain dalam [1]. Sedangkan untuk ruang barisan, khususnya ruang barisan Orlicz [3][4] telah membahasnya secara lengkap. Lebih lanjut [3] membahas fungsional aditif dan kontinu pada ruang barisan Orlicz. Sementara itu [2] memperkenalkan beberapa ruang barisan selisih antara lain $\ell_\infty(\Delta)$, $c_0(\Delta)$. Berdasarkan [2] ini serta memperhatikan hasil-hasil penelitian dari [4], maka dicoba mengkontruksi suatu ruang barisan selisih yang lain yaitu ruang barisan Orlicz

sesilih. Disamping itu dengan memperhatikan hasil-hasil dari [2] dapat dikonstruksi pula fungsional aditif dan kontinu pada ruang barisan Orlicz selisih.

2. Ruang Bernorma- F

Diberikan X ruang barisan bilangan real yang merupakan ruang vektor atas R . Jika X dilengkapi dengan norma- F yaitu norma $\|\cdot\|$ yang memenuhi :

- (i) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (ii) $\|x\| = \|-x\|$
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x, y \in X$
- (iv) $\|\alpha_n x^{(n)} - \alpha x\| \rightarrow 0$ jika $\alpha_n \rightarrow \alpha$ dan $\|x^{(n)} - \alpha x\| \rightarrow 0$

maka X disebut ruang barisan bernorma- F . Jika X ruang barisan bernorma- F yang lengkap, maka X disebut ruang Frechet.

Selanjutnya, ruang Frechet X dikatakan ruang FK jika untuk setiap k , fungsi $P_k : X \rightarrow R$. dengan $P_k(x) = x_k$ kontinu.

Barisan blok $\{z^n\}$ di dalam ruang barisan X adalah suatu barisan dengan elemen ke- n yaitu :

$$z^n = \{0, \dots, 0, z_{i(n-1)+1}, \dots, z_{i(n)}, 0, \dots\}$$

dengan $i(0) = 0$ dan $\{i(n)\}$ adalah suatu barisan naik dari bilangan asli.

Misalkan X suatu ruang barisan bernorma- F , maka X dikatakan mempunyai Gliding Hump Property (GHP), jika untuk setiap barisan blok $\{z^n\}$ dengan $\|z^n\| \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$, terdapat suatu barisan bagian bilangan asli $\{n(k)\}$ sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} z^{n(k)} \in X$.

Mudah dipahami bahwa setiap ruang barisan bernorma- F yang lengkap mempunyai GHP .

3. Ruang Barisan Orlicz Selisih

Diberikan φ fungsi kontinu bernilai real naik pada $[0, \infty)$ dengan $\varphi(0) = 0$ dan $\varphi(t) = \varphi(|t|)$ untuk semua t . Fungsi ini disebut fungsi Orlicz. Suatu himpunan Orlicz dinotasikan dengan ℓ_φ adalah himpunan semua $x = \{x_k\}$ sehingga

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} < +\infty \quad \text{atau} \quad \ell_\varphi = \left\{ x = \{x_k\}; \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x_k) < +\infty \right\}$$

Mudah ditunjukkan bahwa himpunan Orlicz ℓ_φ merupakan himpunan konvex. Suatu fungsi φ dikatakan memenuhi kondisi δ_2 jika terdapat $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$ sehingga

$$\varphi(2t) \leq \alpha\varphi(t) \quad \text{untuk} \quad |t| \leq \beta$$

Fungsi Orlicz φ ternyata memenuhi kondisi δ_2 , sehingga himpunan Orlicz ℓ_φ merupakan ruang linier.

Selanjutnya, didefinisikan suatu norma pada ℓ_φ dengan:

$$\|x\| = \inf \left\{ \xi > 0; \rho\left(\frac{x}{\xi}\right) \leq \xi \right\}$$

untuk setiap $x \in \ell_\varphi$. Ruang ℓ_φ yang dilengkapi dengan norma di atas merupakan ruang bernorma- F yang lengkap atau ruang Frechet dan disebut ruang barisan Orlicz.

Sekarang akan diberikan pengertian ruang barisan Orlicz selisih. Seperti halnya ruang barisan Orlicz, himpunan barisan Orlicz selisih didefinisikan sebagai: $\ell_\varphi(\Delta) = \{x = (x_k); \Delta x \in \ell_\varphi\}$ dengan $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k-1})$. Bahwa ruang $\ell_\varphi(\Delta)$ merupakan ruang linier.

Selanjutnya, didefinisikan suatu norma pada $\ell_\varphi(\Delta)$ dengan $\|x\| = |x_1| + \|\Delta x\|_{\ell_\varphi}$. Dengan norma ini, akan ditunjukkan bahwa $\ell_\varphi(\Delta)$ merupakan ruang bernorma yang lengkap. Hal ini akan dijabarkan dalam teorema berikut.

Teorema 3.1 *Ruang $\ell_\varphi(\Delta)$ merupakan ruang bernorma- F dengan norma $\|x\| = |x_1| + \|\Delta x\|_{\ell_\varphi}$.*

Bukti. Diambil sebarang $x, y \in \ell_\varphi(\Delta)$

(i) Jelas bahwa $\|x\| = |x_1| + \|\Delta x\|_{\ell_\varphi} \geq 0$.

$$\begin{aligned} \|x\| = |x_1| + \|\Delta x\|_{\ell_\varphi} = 0 &\iff |x_1| = 0 \text{ dan } \|\Delta x\| = 0 \\ &\iff x_1 = 0 \text{ dan } \Delta x = x_k - x_{k-1} = 0 \\ &\iff x_1 = \dots = x_{k-1} = x_k = 0, \text{ untuk setiap } k \\ &\iff x = \theta \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \|-x\| &= |-x| + \|\Delta(-x)\|_{\ell_{\text{varphi}i}} \\ &= |-x| + \|-\Delta x\|_{\ell_{\text{varphi}i}} \\ &= |x| + \|\Delta x\|_{\ell_{\text{varphi}i}} \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

(iii) Akan ditunjukkan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\begin{aligned}
 \|x + y\| &= |x_1 + y_1| + \|\Delta x + \Delta y\|_{\ell_{varphi}} \\
 &\leq |x_1| + |y_1| + \|\Delta x\|_{\ell_{varphi}} + \|\Delta y\|_{\ell_{varphi}} \\
 &\leq |x_1| + \|\Delta x\|_{\ell_{varphi}} + |y_1| + \|\Delta y\|_{\ell_{varphi}} \\
 &\leq \|x\| + \|y\|
 \end{aligned}$$

Dengan demikian $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(iv)

$$\begin{aligned}
 \|\alpha_n x^{(n)} - \alpha x\| &= \|\alpha_n x^{(n)} - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \\
 &\leq \|\alpha_n x^{(n)} - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha x\| \\
 &\leq |\alpha_n| \|x^{(n)} - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\|
 \end{aligned}$$

Jika $\alpha_n \rightarrow \alpha$ dan $\|x^{(n)} - x\| \rightarrow 0$, maka $\|\alpha_n x^{(n)} - \alpha x\| \rightarrow 0$

Dengan demikian terbukti bahwa ruang barisan Orlicz selisih merupakan ruang bernorma- F . \square

Teorema 3.2 Ruang $\ell_\varphi(\Delta)$ yang dilengkapi dengan norma $\|x\| = |x_1| + \|\Delta x\|_{\ell_\varphi}$ merupakan ruang bernorma- F yang lengkap atau ruang Frechet dan disebut ruang barisan Orlicz selisih.

Bukti. Tinggal membuktikan bahwa $\ell_\varphi(\Delta)$ adalah lengkap. Diberikan $\{x^{(n)}\}$ adalah barisan di $\ell_\varphi(\Delta)$ sedemikian hingga

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| \rightarrow 0, \quad \text{untuk } n, m \rightarrow \infty$$

Oleh karena itu

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| = |x_1^{(n)} - x_1^{(m)}| + \|\Delta x^{(n)} - \Delta x^{(m)}\|_{\ell_\varphi} \rightarrow 0, \quad \text{untuk } n, m \rightarrow \infty$$

Dengan demikian diperoleh :

- a. $|x_1^{(n)} - x_1^{(m)}| \rightarrow 0$, untuk $n, m \rightarrow \infty$
- b. $\|\Delta x^{(n)} - \Delta x^{(m)}\|_{\ell_\varphi} \rightarrow 0$ untuk $n, m \rightarrow \infty$
 atau $\|(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) - (x_k^{(m)} - x_{k-1}^{(m)})\| \rightarrow 0$, untuk $n, m \rightarrow \infty$
 atau $\|x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}\|_{\ell_\varphi} \rightarrow 0$ dan $\|x_k^{(m)} - x_{k-1}^{(m)}\|_{\ell_\varphi} \rightarrow 0$, untuk $n, m \rightarrow \infty$

Karena φ kontinu dan naik pada $[0, \infty)$, maka untuk setiap k diperoleh

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \rightarrow 0, \quad \text{untuk } n, m \rightarrow \infty$$

Akibatnya untuk setiap k barisan $\{x_k^{(n)}\}_{n \geq 1}$ adalah barisan Cauchy di R yang lengkap, artinya untuk setiap k terdapat $x_k \in R$ sedemikian hingga

$$x_k^{(n)} \rightarrow x_k \quad \text{untuk } n \rightarrow \infty$$

Selanjutnya dibentuk $x = \{x_k\}$. Akan dibuktikan

- i. $\|x^{(n)} - x\| \rightarrow 0$, untuk $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|x^{(n)} - x\| &= |x_1^{(n)} - x_1| + \|\Delta x^{(n)} - \Delta x\|_{\ell_\varphi} \\ &= |x_1^{(n)} - x_1| + \|(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) - (x_k - x_{k-1})\|_{\ell_\varphi} \\ &\leq |x_1^{(n)} - x_1| + \|x_k^{(n)} - x_k\|_{\ell_\varphi} + \|x_{k-1}^{(n)} - x_{k-1}\|_{\ell_\varphi} \end{aligned}$$

Sehingga untuk $n \rightarrow \infty$ diperoleh

- a. $|x_1^{(n)} - x_1| \rightarrow 0$
b. $\|x_k^{(n)} - x_k\| \rightarrow 0$, untuk $n \rightarrow \infty$

Dengan demikian $\|x^{(n)} - x\| \rightarrow 0$, untuk $n \rightarrow \infty$.

- ii. Akan ditunjukkan $x \in \ell_\varphi(\Delta)$ berarti menunjukkan bahwa $\Delta x \in \ell_\varphi$. Terdapat bilangan bulat positif N sehingga sedemikian hingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\Delta x_N - \Delta x) < 1 < \infty$$

sehingga $\Delta x_N - \Delta x \in \ell_\varphi$ dengan ℓ_φ adalah linier, maka $\Delta x \in \ell_\varphi$.

Dengan demikian i dan ii dipenuhi. Jadi $\ell_\varphi(\Delta)$ lengkap. \square

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa $\ell_\varphi(\Delta)$ mempunyai sifat AK yaitu $\|x^N - x\|_{\ell_\varphi} \rightarrow 0$ untuk $N \rightarrow \infty$. Untuk menunjukkan ini, diberikan

$$\rho\left(\frac{\Delta(x^N - x)}{\varepsilon}\right) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon}\right) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon}\right)$$

Karena $\Delta x \in \ell_\varphi(\Delta)$, maka terdapat bilangan bulat P , sehingga $\sum_{k=N+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon$, untuk setiap $N \geq P$. Dengan demikian $\rho\left(\frac{\Delta(x^N - x)}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon$ untuk setiap $N \geq P$.

Oleh karena itu $\|x^N - x\| \leq \varepsilon$ untuk $N \geq P$. Dengan kata lain $\|x^N - x\| \rightarrow 0$ untuk $N \rightarrow \infty$. Dari penjabaran di atas bahwa ruang barisan Orlicz selisih merupakan ruang Frechet, sehingga mempunyai *GHP* dan mempunyai sifat *AK* yaitu $\|x^N - x\|_{\ell_\varphi} \rightarrow 0$ untuk $N \rightarrow \infty$, dengan $x^N = \{x_1, x_2, \dots, x_N, 0, \dots\}$ dari setiap barisan $x = (x_k) \in \ell_\varphi(\Delta)$.

Maka ruang barisan Orlicz selisih memenuhi sifat $\|x^N\| \leq \|x\|$, untuk setiap $x \in \ell_\varphi(\Delta)$.

4. Fungsional Aditif dan Kontinu pada Ruang Barisan Orlicz Selisih

Sekarang akan dijabarkan tentang Fungsional aditif dan kontinu pada ruang barisan orlicz selisih. Sebelumnya akan dibahas teorema-teorema yang akan digunakan untuk mengkonstruksi fungsional aditif dan kontinu pada ruang barisan Orlicz selisih sebagai berikut.

Teorema 4.1 *Diberikan X ruang barisan yang mempunyai sifat *AK*. Jika f adalah fungsional aditif dan kontinu pada X , maka $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k)$ ada, untuk setiap $x = \{x_k\} \in X$. Dengan $g(k, 0) = 0$ dan $g(k, \cdot)$ kontinu, untuk setiap $k \in N$*

Bukti. Diberikan e^k yaitu barisan dengan elemen ke- k sama dengan 1 dan 0 untuk yang lain. Karena X mempunyai sifat *AK*, maka untuk setiap $x \in X$ memuat semua barisan berhingga, $\|x^N\| \leq \|x\| \rightarrow 0$, untuk $N \rightarrow \infty$. Oleh karena f aditif dan kontinu maka

$$\|f(x^N - x)\| \rightarrow 0, \quad \text{untuk } N \rightarrow \infty$$

atau

$$\|f(x^N) - f(x)\| \rightarrow 0, \quad \text{untuk } N \rightarrow \infty$$

atau

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f(x^N) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} f\left(\sum_{k=1}^N x_k e^k\right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N f(x_k e^k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k e^k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k)
 \end{aligned}$$

dengan $g(k, t) = f(te^k)$ dan $g(k, t)$ adalah fungsi kontinu untuk setiap $k \in N$.

Teorema 4.2 Diberikan X ruang barisan yang mempunyai GHP yang memuat semua barisan berhingga dan $\|x^N\| \leq \|x\|$, dan diberikan f adalah fungsional pada X , jika $g(k, 0) = 0$ dan $g(k, \cdot)$ kontinu untuk setiap $k \in N$ sehingga

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k) \quad \text{ada, } \forall x = \{x_k\} \in X$$

maka f adalah fungsional aditif dan kontinu.

Bukti. Akan dibuktikan f adalah kontinu. Sekarang andaikan f tidak kontinu di $x \in X$, maka terdapat barisan $\{y(i)\} \in X$ sedemikian hingga $\|y(i) - x\| \rightarrow 0$ untuk $i \rightarrow \infty$.

Tetapi $\left| \sum_{k=1}^{\infty} g(k, y_k^{(i)}) - \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k) \right| > \varepsilon$ untuk semua i .

Akan disusun dua barisan dari bulat positif sebagai berikut :

Ambil $n(0) = 0$; $m(1) = 1$ dan dipilih $n(1)$ sedemikian hingga

$$\left| \sum_{k=n(0)+1}^{n(1)} g(k, y_k^{(m(1))}) - \sum_{k=1}^{n(1)} g(k, x_k) \right| > \varepsilon$$

karena $g(k, \cdot)$ adalah kontinu untuk $k = 1, 2, \dots, n(1)$, maka terdapat $m(2) > m(1)$ sedemikian hingga

$$\left| \sum_{k=1}^{n(1)} g(k, y_k^{(m(2))}) - \sum_{k=1}^{n(1)} g(k, x_k) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

selanjutnya terdapat $n(2) > n(1)$ sedemikian hingga

$$\left| \sum_{k=1}^{n(2)} g(k, y_k^{(m(2))}) - \sum_{k=1}^{n(2)} g(k, x_k) \right| > \varepsilon$$

Dari kedua pertidaksamaan diatas didapat

$$\left| \sum_{k=n(1)+1}^{n(2)} g(k, y_k^{(m(2))}) - \sum_{k=n(1)+1}^{n(2)} g(k, x_k) \right| > \frac{\varepsilon}{2}$$

Secara umum dapat diperoleh barisan naik dari dua bulat positif $\{n(i)\}$ dan $\{m(i)\}$ sedemikian hingga

$$\left| \sum_{k=n(i-1)+1}^{n(i)} g(k, y_k^{(m(i))}) - \sum_{k=n(i-1)+1}^{n(i)} g(k, x_k) \right| > \frac{\varepsilon}{2}$$

, untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots$

Sekarang didefinisikan barisan blok $\{z^i\}$ di X dengan

$$z^i = \{0, \dots, 0, y_{n(i-1)+1}^{(m(i))} - x_{n(i-1)+1}, \dots, y_{n(i)}^{(m(i))} - x_{n(i)}, 0, \dots\}$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots$

Mengingat asumsi bahwa $\|x^N\| \leq \|x\|$ diperoleh

$$\|z^i\| \leq 2\|y^{(m(i))} - x\| \rightarrow 0, \quad \text{untuk } i \rightarrow \infty$$

karena X mempunyai GHP , maka terdapat sub barisan $\{i(k)\}$ sedemikian hingga

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} x^{i(k)} \in X$$

Oleh karena itu $\sum_{k=1}^{\infty} g(k, z_k + x_k) - \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k)$ adalah konvergen.

Yang kontradiksi dengan pengandaian diatas. Dengan demikian f adalah kontinu di x untuk setiap $x \in X$

Akibat dari Teorema 4.1 dan Teorema 4.2 serta memperhatikan sifat-sifat dari ruang barisan Orlicz selisih yang telah dijabarkan di atas, maka dapat dikonstruksi fungsional aditif dan kontinu pada ruang barisan Orlicz selisih yang diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.3 *Fungsional $f : \ell_{\varphi}(\Delta) \rightarrow R$ aditif dan kontinu jika dan hanya jika $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k)$ ada, untuk setiap $x = \{x_k\} \in \ell_{\varphi}(\Delta)$ dengan $g(k, 0) = 0$ dan $g(k, \cdot)$ kontinu untuk setiap $k \in N$.*

Bukti. Karena ruang barisan Orlicz selisih merupakan ruang Frechet, maka mempunyai *GHP* serta mempunyai sifat *AK* dan juga memenuhi sifat $\|x^N\| \leq \|x\|$, untuk setiap $x \in \ell_\varphi(\Delta)$ serta akibat dari Teorema 4.1 dan Teorema 4.2.

Pustaka

- [1] Chew, T. S., 1985, Orthogonally Additive Functionals, PhD. Disertation, national University of Singapore.
- [2] Colak, R and Mikail ET, 1997, On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations, Hokkaido mathematical Journal, Vol 26 (p.483 - 492) Japan.
- [3] Lee, P.Y, 1993, Sequence Space and the Gliding Hump Property , SEA Bull, Math. 17, 65-72
- [4] Sadjidon dan Sri Daru , 2002, Ruang Barisan Orlicz, Makalah Thesis UGM.